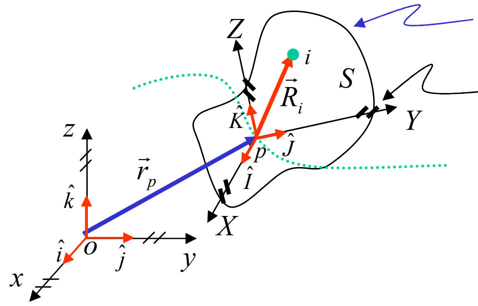
Velocidad y aceleración

Cuerpo rígido : Cuerpo en el cual la distancia entre dos puntos cualquiera no varia en el tiempo

Cuerpo rígido S



Sistema móvil solidario a S
El punto p no necesariamente pertenece a S

$$i \in S \quad \forall \text{ t} \Rightarrow \begin{cases} \vec{V}_{Ri} = \vec{0} \\ \vec{A}_{Ri} = \vec{0} \end{cases}$$

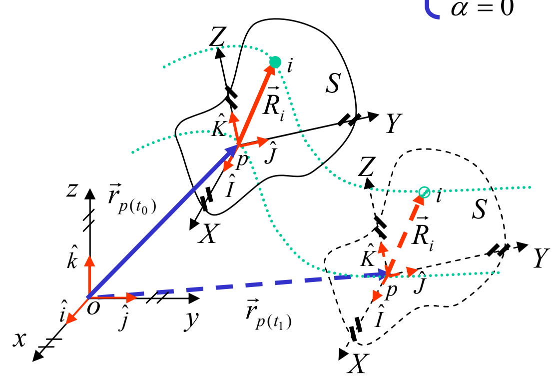
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega} \times \vec{R}_i \\ \vec{a}_i = \vec{a}_p + \vec{\alpha} \times \vec{R}_i + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}_i\right) \end{cases}$$

Universidad Simón Bolívar
MC-2431 Dinámica I
Euro Casanova, sep-dic 2007

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
Sist. de referencia
Una partícula
Sist. de partículas
Cuerpos rígidos
III. Dinámica

Traslación pura

Traslación pura :
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_p \neq \vec{0} \\ \vec{\omega} = \vec{0} \\ \vec{\alpha} = \vec{0} \end{cases} \quad \forall \text{ t}$$



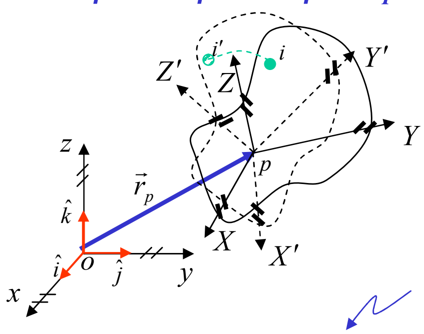
$$\Rightarrow \forall\, i \in S \begin{cases} \vec{v}_i = \vec{v}_p + \cancelto{\vec{0}}{\vec{\omega}} \times \vec{R}_i = \vec{v}_p \\ \vec{a}_i = \vec{a}_p + \cancelto{\vec{0}}{\vec{\alpha}} \times \vec{R}_i + \vec{\omega} \times \cancelto{\vec{0}}{\left(\vec{\omega} \times \vec{R}_i\right)} = \vec{a}_p \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Todos los puntos de S tienen la misma velocidad y aceleración

Rotación pura

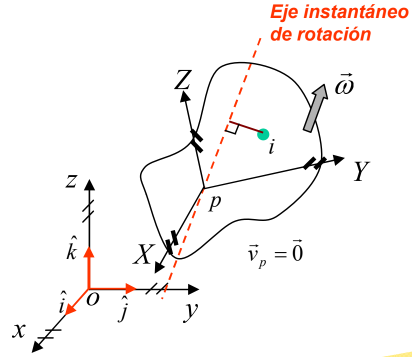
Rotación pura respecto al punto p :

$$\begin{cases} \vec{v}_p = \vec{0} & \\ \vec{a}_p = \vec{0} & \forall\ t \\ \vec{\omega} \neq \vec{0} & \\ \vec{\alpha} \neq \vec{0} & \textit{(en general)} \end{cases}$$



En general todos los puntos i de S tienen una velocidad y aceleración diferentes

$$\forall\ i \in S \quad \begin{cases} \vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{R}_i \\ \vec{a}_i = \vec{\alpha} \times \vec{R}_i + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}_i\right) \end{cases}$$



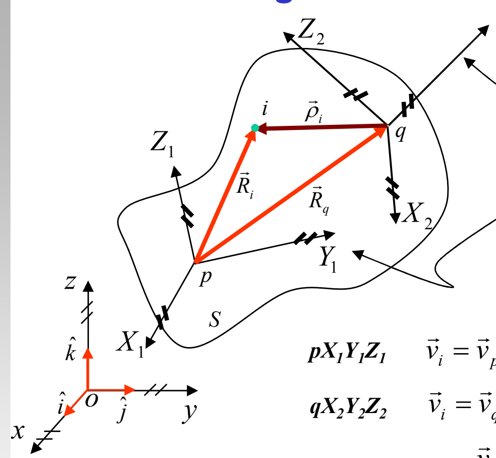
*El módulo de la velocidad de un punto i depende de lo alejado que se encuentre el punto respecto a un eje que pasa por p y que es paralelo a la velocidad angular $\vec{\omega}$. A este eje se le llama **eje instantáneo de rotación***

Universidad Simón Bolívar

MC-2431 Dinámica I
Euro Casanova, sep-dic 2007

I. Leyes de Newton
II. Cinemática
Sist. de referencia
Una partícula
Sist. de partículas
Cuerpos rígidos
III. Dinámica

Velocidad Angular como vector libre



Sist. $qX_1Y_1Z_1$ solidario a S $(\vec{\omega}_2)$

Sist. $pXYZ$ solidario a S $(\vec{\omega}_1)$

$$i,\ p,\ q\ \in\ S$$

$$\vec{R}_i = \vec{R}_q + \vec{\rho}_i \qquad \forall\ t$$

$$\boldsymbol{pX_1Y_1Z_1} \qquad \vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_i$$

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{qX_2Y_2Z_2} \qquad \vec{v}_i &= \vec{v}_q + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i \\ \vec{v}_q &= \vec{v}_p + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_q \end{aligned}\right\} \vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_q + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i$$

$$\begin{array}{cc} \boldsymbol{pXYZ} & \boldsymbol{qX_1Y_1Z_1} \\ \vec{v}_i = & \vec{v}_i \end{array}$$

$$\cancel{\vec{v}_p} + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_i = \cancel{\vec{v}_p} + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_q + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i$$

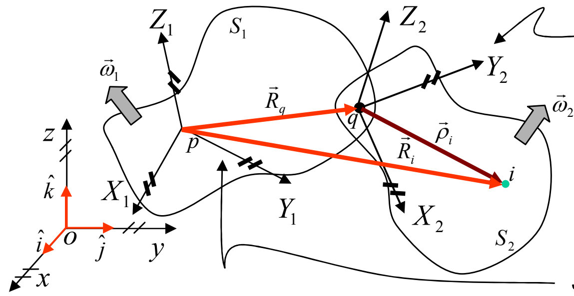
$$\left.\begin{aligned} \vec{\omega}_1 \times \left(\vec{R}_i - \vec{R}_q\right) &= \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i \\ \vec{R}_i &= \vec{R}_q + \vec{\rho}_i \end{aligned}\right\} \left(\vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2\right) \times \vec{\rho}_i = \vec{0}$$

$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_2$$

$$\vec{\alpha}_1 = \vec{\alpha}_2$$

La velocidad angular $\vec{\omega}$ y la aceleración angular $\vec{\alpha}$ son vectores libres (no tienen punto de aplicación, ni línea de acción)

Velocidad angular absoluta y relativa



Sist. $qX_2Y_2Z_2$ solidario a S_2

S_1 y S_2 están unidos por un pasador en q y tienen velocidades angulares absolutas diferentes

$$p, q \in S_1 \qquad i, q \in S_2$$

Sist. $pX_1Y_1Z_1$ solidario a S_1

$pX_1Y_1Z_1$ $\quad \vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_i + \vec{V}_{Ri/S_1}$

$$\left.\begin{array}{ll} qX_2Y_2Z_2 & \vec{v}_i = \vec{v}_q + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i \\ pX_1Y_1Z_1 & \vec{v}_q = \vec{v}_p + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_q \end{array}\right\} \vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_q + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i$$

$pX_1Y_1Z_1$ $qX_2Y_2Z_2$
$\vec{v}_i = \vec{v}_i$

$$\Rightarrow \cancel{\vec{v}_p} + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_i + \vec{V}_{Ri/S_1} = \cancel{\vec{v}_p} + \vec{\omega}_1 \times \vec{R}_q + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{V}_{Ri/S_1} = \vec{\omega}_1 \times \left(\vec{R}_q - \vec{R}_i\right) + \vec{\omega}_2 \times \vec{\rho}_i \\ \vec{R}_i = \vec{R}_q + \vec{\rho}_i \end{array}\right\} \vec{V}_{Ri/S_1} = \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\right) \times \vec{\rho}_i$$

Respecto a S_1, S_2 está en rotación pura alrededor del punto q

$$\Rightarrow \vec{V}_{Ri/S_1} = \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \times \vec{\rho}_i \Rightarrow \left[\vec{\Omega}_{S_2/S_1} - \left(\vec{\omega}_2 - \vec{\omega}_1\right)\right] \times \vec{\rho}_i = \vec{0}$$

Velocidad angular de S_2 relativa a S_1

$$\Rightarrow \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_1 + \vec{\Omega}_{S_2/S_1} \Rightarrow \vec{\alpha}_2 = \vec{\alpha}_1 + \vec{\omega}_2 \times \vec{\Omega}_{S_2/S_1} + \vec{A}_{S_2/S_1} \qquad \vec{A}_{S_2/S_1} = \frac{D\vec{\Omega}_{S_2/S_1}}{Dt}$$

Universidad Simón Bolívar

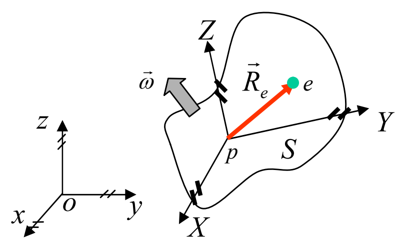
MC-2431 Dinámica I
Euro Casanova, sep-dic 2007

I. Leyes de Newton

II. Cinemática
- Sist. de referencia
- Una partícula
- Sist. de partículas
- **Cuerpos rígidos**

III. Dinámica

Eje instantáneo de rotación y deslizamiento (EIR&D)



¿ Existe algún punto $e \in S \,/\, \vec{v}_e \parallel \vec{\omega}$?

$$\vec{v}_e = \vec{v}_p + \vec{\omega} \times \vec{R}_e + \cancelto{\vec{0}}{\vec{V}_{Re/S}}$$

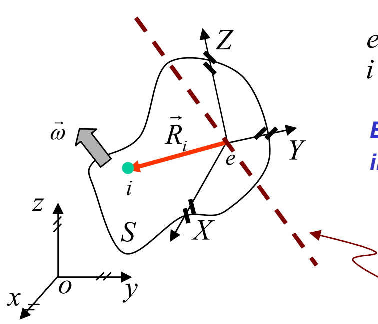
$$\vec{v}_e \parallel \vec{\omega} \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{v}_e = \vec{\omega} \times \left(\vec{v}_p + \vec{\omega} \times \vec{R}_e\right) = \vec{0}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}_p + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}_e\right) = \vec{0}$$

Triple producto vectorial $\quad \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{C} \cdot \vec{A}\right)\vec{B} - \left(\vec{B} \cdot \vec{A}\right)\vec{C}$

$$\Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{v}_p + \left(\vec{R}_e \cdot \vec{\omega}\right)\vec{\omega} - \left(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}\right)\vec{R}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{R}_e = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_p}{\omega^2} + \frac{\left(\vec{R}_e \cdot \vec{\omega}\right)}{\omega^2}\vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_p}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}$$

No sólo existe un punto $e \in S \,/\, \vec{v}_e \parallel \vec{\omega}$, sino que existe un eje completo, que pasa por e y que tiene la dirección de $\vec{\omega}$, que verifica esta condición. A ese eje se le llama eje instantáneo de rotación y deslizamiento (EIR&D)



EIR&D

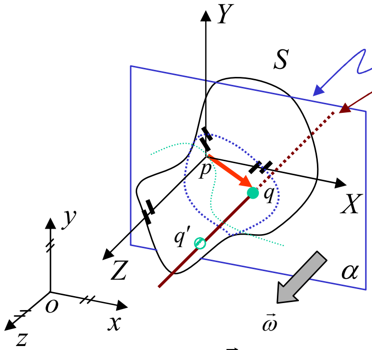
$$\left.\begin{array}{l} e \in EIR\,\&\,D \\ i \in S \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}_i = \vec{v}_e + \vec{\omega} \times \vec{R}_i$$

El movimiento de cualquier punto $i \in S$ puede ser interpretado como:

- ***Una traslación (deslizamiento) a lo largo del EIR&D***
- ***Una rotación respecto al EIR&D***

Movimiento uniplanar

Un cuerpo rígido S está en movimiento uniplanar, si la trayectoria de un punto cualquiera $p \in S$ está contenida en un mismo plano y la velocidad angular absoluta de S es siempre perpendicular a ese plano



Plano del movimiento (xy)

Eje perpendicular al llano del movimiento (xy)

$$\vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_i \qquad p, i \in \alpha$$

$\vec{v}_p \in$ ***plano del movimiento (xy)***

$\vec{\omega} \perp$ ***plano del movimiento (xy)***

$\vec{R}_i \in$ ***plano del movimiento (xy)***

$\vec{\omega}\times\vec{R}_i \in$ ***plano del movimiento (xy)***

$\Rightarrow \vec{v}_i \in$ ***plano del movimiento (xy)***

$$\vec{v}_q = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_q$$

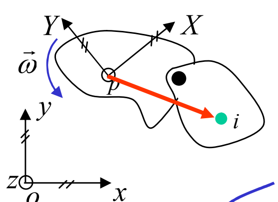
$$\vec{v}_{q'} = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_{q'}$$

$$\vec{R}_{q'} = \vec{R}_q + \overline{pq'} = \vec{R}_q + \frac{\left|pq'\right|}{\left|\vec{\omega}\right|}\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{q'} = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\left(\vec{R}_q + \frac{\left|pq'\right|}{\left|\vec{\omega}\right|}\vec{\omega}\right) = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_q = \vec{v}_q$$

En mov. uniplanar, todos los puntos contenidos en un eje perpendicular al plano del movimiento tienen la misma velocidad y aceleración !

Movimiento uniplanar: aceleración



$$\vec{v}_i = \vec{v}_p + \vec{\omega}\times\vec{R}_i + \vec{V}_{Ri/S}$$

$$\vec{a}_i = \vec{a}_p + \vec{\alpha}\times\vec{R}_i + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}_i\right) + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{Ri} + \vec{A}_{Ri}$$

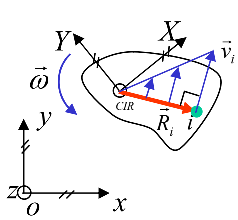
Triple producto vectorial $\quad \vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{C}\cdot\vec{A}\right)\vec{B} - \left(\vec{B}\cdot\vec{A}\right)\vec{C}$

$$\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{R}_i\right) = \left(\cancelto{0}{\vec{R}_i\cdot\vec{\omega}}\right)\vec{\omega} - \left(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\right)\vec{R}_i = -\omega^2\vec{R}_i$$

$$\Rightarrow \vec{a}_i = \vec{a}_p + \vec{\alpha}\times\vec{R}_i - \omega^2\vec{R}_i + 2\vec{\omega}\times\vec{V}_{Ri} + \vec{A}_{Ri} \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\hat{k} + \omega\cancelto{0}{\frac{d\hat{k}}{dt}} = \alpha\,\hat{k}$$

Centro instantáneo de rotación

En mov. uniplanar el EIR&D se convierte en un Eje Instantáneo de Rotación (EIR). La proyección del EIR en el plano de movimiento es un punto de velocidad nula, llamado Centro Instantáneo de Rotación (CIR)



$$\vec{v}_i = \cancelto{\vec{0}}{\vec{v}_{CIR}} + \vec{\omega}\times\vec{R}_i$$

$$\Rightarrow \vec{v}_i = \vec{\omega}\times\vec{R}_i \qquad \left|\vec{v}_i\right| = \omega R_i$$

$\vec{a}_{CIR} \neq \vec{0}$ ***(en general)***

$$\Rightarrow \vec{a}_i = \vec{a}_{CIR} + \vec{\alpha}\times\vec{R}_i - \omega^2\vec{R}_i$$